

# 1 Sistemas ópticos

## 1.1 Sistema óptico

Los instrumentos ópticos utilizan superficies talladas sobre cuerpos transparentes, generalmente de vidrio, para variar la trayectoria de los rayos luminosos. Normalmente se usan superficies planas o esféricas, pero también pueden aparecer superficies cilíndricas, elipsoidales, parabólicas, etc.

Llamaremos sistema óptico al conjunto de estas superficies que modifican la dirección de propagación de la luz.

Vamos a suponer conocidas las definiciones de índice de refracción, objeto e imagen, las leyes fundamentales de la óptica geométrica (reflexión y refracción), así como las normas DIN en cuanto a signos de los ángulos y distancias se refiere.

## 1.2 Sistemas ópticos centrados

Un sistema óptico se denomina centrado cuando todas sus superficies ópticas tienen simetría de revolución respecto a un eje común que se denomina eje óptico.

Un punto objeto  $O$  y el eje óptico determinan un plano llamado plano meridiano que divide al sistema en dos mitades idénticas. A todo rayo,  $a$ , que parte de un objeto, le corresponde un rayo,  $b$ , equivalente, que sigue una trayectoria simétrica de la anterior respecto al plano meridiano (Fig. 1.1).

De aquí se deduce que si los rayos  $a'$  i  $b'$ , que emergen del sistema óptico, convergen en un punto  $O'$ , éste debe estar situado a su vez, por simetría, sobre el plano meridiano. Este punto  $O'$  se denomina punto imagen de  $O$  a través del sistema óptico.

Por este motivo, en los sistemas ópticos centrados se trabaja con los rayos de luz contenidos en el plano meridiano, pues con ellos se puede hallar la posición de la imagen resolviendo un problema de dos dimensiones en lugar de tres.

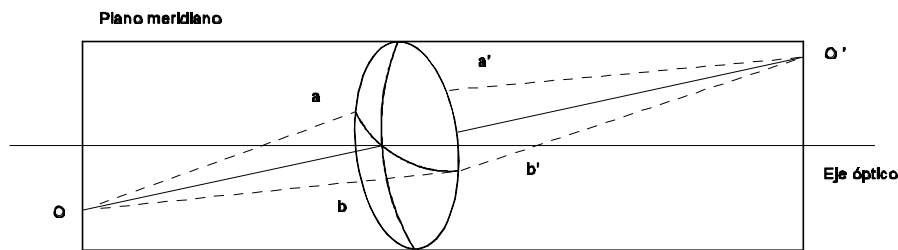


Fig. 1.1

### 1.3 Sistemas ópticos perfectos

Un sistema óptico centrado es perfecto cuando cumple las tres condiciones de Maxwell, que se enuncian a continuación:

1. A un punto objeto le corresponde un punto imagen, de tal manera que todos los rayos que parten del punto objeto y atraviesan el sistema óptico pasan por el punto imagen a la salida del mismo. Al punto objeto y al punto imagen se les denomina puntos conjugados (Fig. 1.2).
2. A un plano objeto perpendicular al eje óptico le corresponde un plano imagen también perpendicular al eje. Estos planos se denominan planos conjugados. Todo punto objeto contenido en el plano objeto tiene su correspondiente punto imagen contenido en el plano imagen (Fig. 1.2).
3. A una figura contenida en el plano objeto le corresponde una figura imagen semejante, contenida en el plano imagen. La razón de la semejanza entre las figuras conjugadas es constante para el par de planos conjugados, y se denomina aumento lateral (Fig. 1.2).

El aumento lateral se representa por la letra  $m$  y se define según la relación:

$$m = \text{aumento lateral} = \frac{\text{dimensión imagen}}{\text{dimensión objeto}} = \frac{y'}{y} \quad (1.1)$$

Cuando el aumento lateral es negativo, se dice que el sistema óptico invierte la imagen. Cuando el valor absoluto del aumento lateral es mayor que la unidad, entonces la imagen es mayor que el objeto; recíprocamente, un aumento lateral con valor absoluto menor que la unidad indica que la imagen es menor que el objeto.

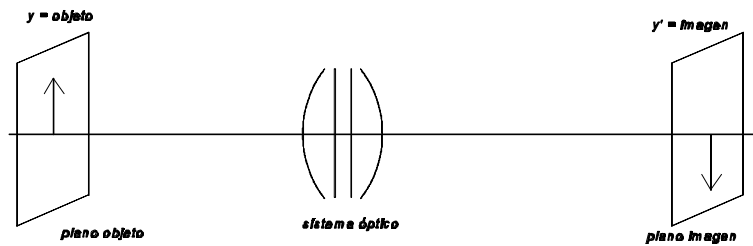


Fig. 1.2

A partir de ahora se supondrán sistemas ópticos perfectos para definir en ellos las magnitudes del resto del capítulo.

#### 1.4 Planos principales objeto e imagen

Se llama planos principales a un par de planos conjugados (objeto y imagen) perpendiculares al eje óptico, para los que el aumento lateral vale la unidad.

El plano principal objeto corta al eje óptico en el punto principal objeto, que se representa por  $H$ . El plano principal imagen corta al eje óptico en el punto principal imagen, representado por  $H'$ .

De la definición de los planos principales se deduce que si un rayo corta el plano principal objeto a una altura  $y$ , dicho rayo sale del sistema óptico cortando al plano principal imagen a la misma altura  $y$  (Fig. 1.3).

#### 1.5 Plano focal imagen

Se llama plano focal imagen al plano donde se forman las imágenes de los objetos situados en el infinito. El aumento lateral para estos planos conjugados vale cero.

El punto de corte del plano focal imagen con el eje óptico se llama foco imagen, y se representa por  $F'$ . La distancia del punto principal imagen  $H'$  al foco imagen  $F'$  se llama distancia focal imagen, o simplemente focal imagen, y se representa por  $f''$ .

$$\text{focal imagen} = f' = \overline{H'F'} \quad (1.2)$$

De esta definición se deduce que un haz de rayos paralelos entre sí, que inciden en un sistema óptico, salen del mismo pasando por un mismo punto del plano focal imagen. En efecto, esto es así porque el haz de rayos paralelos entre sí proviene de un punto del infinito (Fig. 1.3).

Los rayos que entran al sistema paralelos al eje óptico van a salir pasando por el foco imagen (Fig. 1.3).

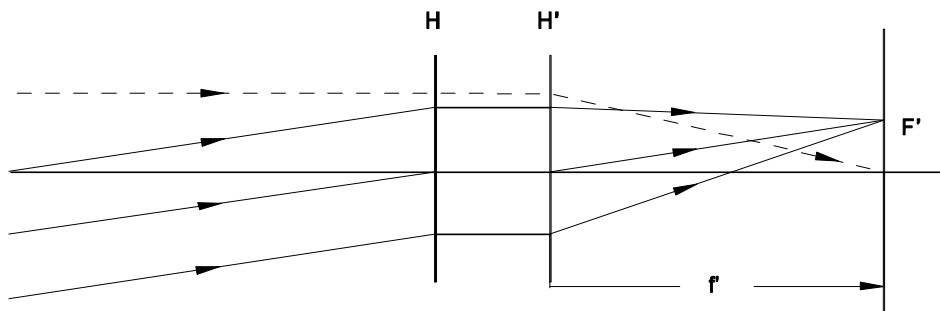


Fig. 1.3

### 1.6 Plano focal objeto

El plano focal objeto es un plano cuya imagen se forma en el infinito. El aumento lateral será infinito en este caso. El punto de corte con el eje óptico se denomina foco objeto y se representa por  $F$ . La focal objeto es la distancia representada por  $f$ , que se define como la distancia del punto principal objeto  $H$  al foco objeto  $F$ :

$$\text{foco objeto} = f = \overline{HF}$$

Cualquier haz de rayos que parte de un punto del plano focal objeto sale del sistema óptico formando un haz cilíndrico de rayos paralelos entre sí. El haz de rayos que parte del foco objeto sale del sistema paralelo al eje óptico.

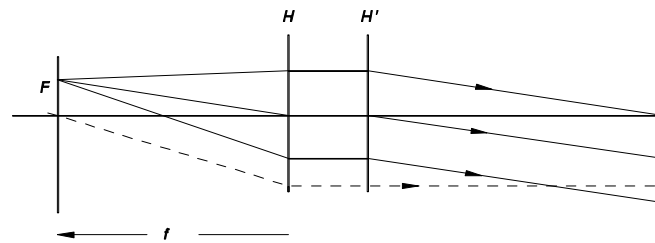


Fig. 1.4

### 1.7 Sistemas positivos y negativos. Relación entre focales

Un sistema óptico es positivo cuando la focal imagen es positiva. Entonces el foco imagen estará a la derecha del punto principal imagen, suponiendo que la luz entra al sistema óptico por la izquierda, según las normas DIN. Con sistemas negativos pasa lo contrario, es decir, el foco imagen estará a la izquierda del punto principal imagen.

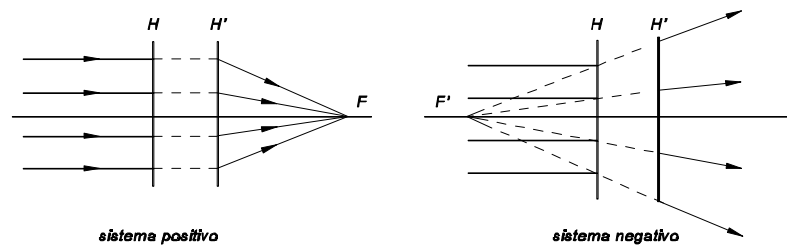


Fig. 1.5

Existe una relación entre las focales objeto y imagen, válida para cualquier sistema óptico perfecto y que se demuestra en óptica geométrica. Es la relación de Lagrange:

$$-\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \quad (1.4)$$

siendo  $f$  la focal objeto,  $f'$  la focal imagen,  $n$  el índice de refracción del espacio objeto y  $n'$  el índice de refracción del espacio imagen.

De esta manera, se puede calcular el valor de la focal objeto en función de la focal imagen, cuyo valor se suele manejar más en la práctica. Así, cuando se da la focal de un sistema óptico, se supone que el valor dado corresponde a la focal imagen  $f'$ .

De la relación de Lagrange (1.4), se deduce que las focales objeto e imagen son de distinto signo. Una excepción a esta regla son los sistemas ópticos con espejos, en los que los índices extremos se pueden considerar de distinto signo.

### 1.8 Ecuaciones de correspondencia

Se supone un sistema óptico del que se conocen sus planos principales y focales. Se coloca un objeto  $OP$  perpendicular al eje óptico, de altura  $y$ . Se trazan los rayos 1 y 2 desde  $P$  y se halla el punto  $P'$ , que será imagen de  $P$  a través del sistema; y, por tanto,  $O'$  será imagen de  $O$ .

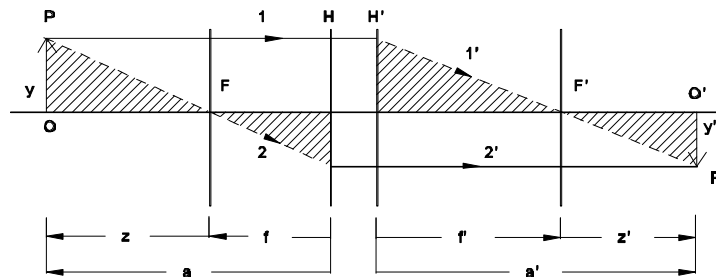


Fig. 1.6

En la figura 1.6 se definen las distancias  $z$ ,  $z'$ ,  $a$  y  $a'$  referentes al objeto y a la imagen, que se miden desde los focos o desde los planos principales correspondientes; por lo tanto,

$$a = HO \quad ; \quad a' = H'O' \quad ; \quad z = FO \quad ; \quad z' = F'O'$$

A partir de las relaciones de semejanza existentes entre los triángulos rayados, se obtiene:

$$m = - \frac{f}{z} = - \frac{f}{a - f} = - \frac{z'}{f'} = - \frac{a' - f'}{f'} \quad (1.5)$$

Si se establece una relación entre la segunda y la cuarta igualdad y se reordenan, se deduce fácilmente que

$$\frac{f}{a} - \frac{f'}{a'} = 1 \quad (1.6)$$

Esta es una ecuación de correspondencia entre objeto e imagen.

Utilizando, además, la relación entre focales (1.4), queda la siguiente relación entre objeto e imagen,

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n'}{f'} \quad (1.7)$$

que se conoce como fórmula de Descartes.

También se puede deducir una expresión por el aumento lateral:

$$m = \frac{n}{n'} \frac{a'}{a} \quad (1.8)$$

Igualando de la fórmula (1.5) las igualdades 1 y 3, se deduce la importante fórmula de Newton:

$$z z' = f f'$$

Con estas relaciones se resuelven todos los problemas relativos a las posiciones y a los tamaños de objeto e imagen.

### 1.9 Sistemas con índices extremos iguales

Muchos de los sistemas ópticos, considerados en su conjunto, tienen los índices de los espacios objeto e imagen iguales,  $n = n'$ . En este caso las ecuaciones anteriores se simplifican notablemente.

Relación entre focales:

$$f = -f'$$

Fórmula de Descartes:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \quad (1.11)$$

Fórmula de Newton:

$$z z' = -f'^2$$

Aumento lateral:

$$m = \frac{a'}{a} \quad (1.13)$$

De acuerdo con estas definiciones se obtienen los signos correspondientes a cada una de las magnitudes, según las normas DIN, que se utilizarán a lo largo de todo el libro. El signo se deberá sustituir en la fórmula correspondiente, aplicando las reglas de signos de álgebra.

No se deben confundir las distancias  $a$  y  $a'$  con las distancias frontales, medidas desde la primera superficie al objeto, o desde la última superficie a la imagen.

### 1.10 Puntos nodales

Todo sistema posee, en el eje, dos puntos conjugados singulares,  $N$  y  $N'$ , denominados puntos nodales (o puntos de Listing) para los cuales el aumento angular es igual a la unidad.

Según la figura 1.7, estos puntos determinan:

$$FN = f'$$

$$F'N' = f$$



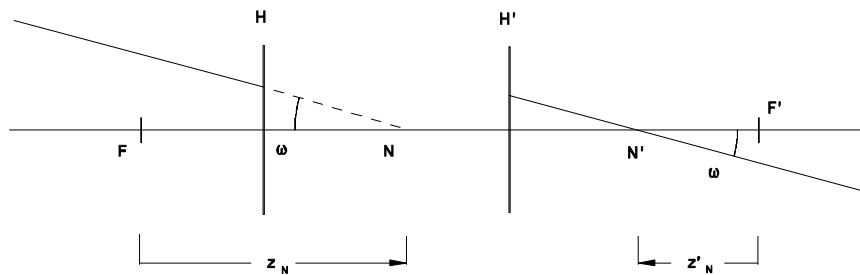


Fig. 1.7

En efecto,  $N$  y  $N'$  son conjugados ya que se cumple que

$$z_N z'_N = f f'$$

Por tanto,  $N'$  es la imagen de  $N$ .

De la figura 1.7 se puede ver fácilmente que los triángulos  $KHN$  y  $K'H'N'$  son iguales, con lo que se demuestra que todo rayo incidente  $i$  que se dirige a  $N$  (punto nodal objeto) emerge paralelamente a su dirección incidente y pasa por  $N'$  (punto nodal imagen).

En la práctica, la determinación de los puntos nodales de un sistema óptico, conocidos sus planos principales y focales, se realiza tal y como se indica a la figura 1.8.

Por construcción, se cumple que el aumento angular es  $+1$  y las igualdades anteriores son

$$z_N = f' \quad ; \quad z'_N = f$$

también se cumple

$$HN = H'N' = f + f'$$

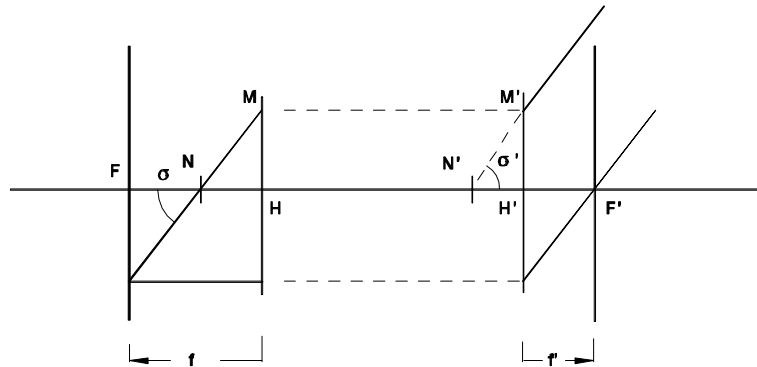


Fig. 1.8

En los sistemas con índices extremos iguales, que se verán a continuación, y tal como muestra la figura 1.9, el rayo 1 incide sobre  $H$  formando un ángulo  $\sigma$  con el eje óptico. Con ayuda del rayo 2, que entra por  $F$ , hallamos el punto  $P'$ , donde concurren  $1'$  y  $2'$ .

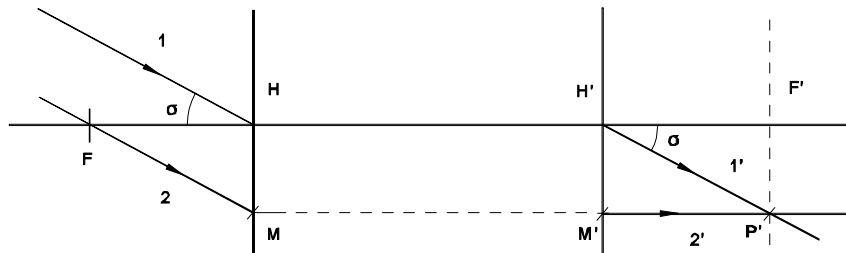


Fig. 1.9

Los triángulos  $HMF$  y  $H'M'F'$  son iguales entre sí, por ser rectángulos con catetos iguales, luego el ángulo  $\sigma'$  es igual a  $\sigma$ .

La propiedad se enuncia como sigue: en los sistemas ópticos con índices extremos iguales, todo rayo que incide en el punto principal objeto sale por el punto principal imagen formando el mismo ángulo con el eje óptico.

### 1.11 Sistemas delgados

Cuando la separación entre los planos principales  $HH'$  es despreciable frente a las distancias focales, se dice que el sistema óptico es delgado. Los sistemas ópticos delgados se representan como en la figura 1.10.

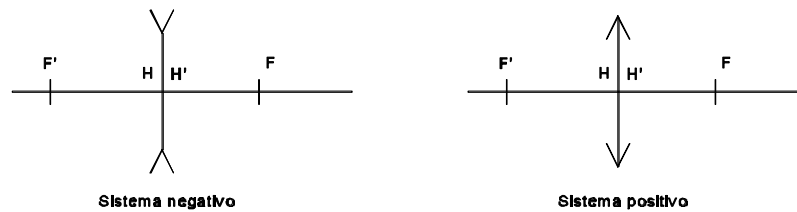


Fig. 1.10

Los planos principales aparecen en un plano meridiano como un segmento perpendicular al eje óptico, con flechas en sus extremos. El tamaño del segmento representa el diámetro útil del sistema óptico. En los sistemas positivos las flechas miran hacia fuera, mientras que en los sistemas negativos las flechas están dirigidas hacia el eje óptico.

### 1.12 Trazado de rayos

Los planos principales y focales reciben el nombre de elementos cardinales, pues con su ayuda se puede hallar la posición de la imagen, tal como se ha visto, y se puede trazar el rayo emergente  $E$  correspondiente a un rayo incidente  $I$ .

Veamos 2 métodos de trazado de rayos, dados los elementos cardinales.

Método 1. Se halla el punto de corte  $P$  del rayo incidente  $I$  con el plano focal objeto. Para dicho punto se traza un rayo auxiliar  $A$ , paralelo al eje, que sale por  $F'$  y que será paralelo al rayo emergente  $E$  (Fig. 1.11).

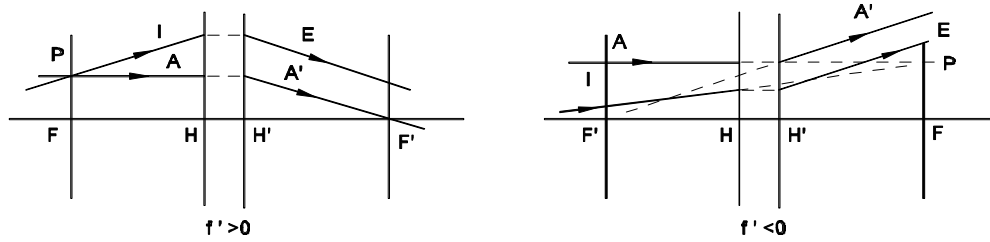


Fig. 1.11

Cuando los índices del sistema son iguales, se puede utilizar un método semejante al anterior. Se traza el rayo auxiliar  $B$ , que une  $P$  con  $H$ , y que saldrá por  $H'$  sin desviarse, según  $B'$ . Este rayo ha de ser paralelo a  $E$  (Fig. 1.12):

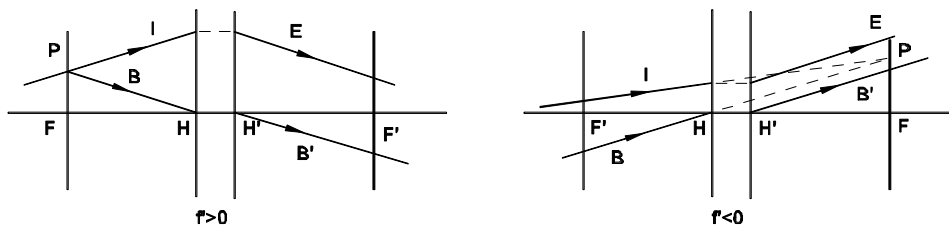


Fig. 1.12

Método 2. Se traza un rayo paralelo al incidente pasando por el foco objeto  $F$ . Este rayo auxiliar  $A$  saldrá paralelo al eje según  $A'$  y cortará el plano focal imagen en un punto  $Q$ , al que concurre el rayo emergente:

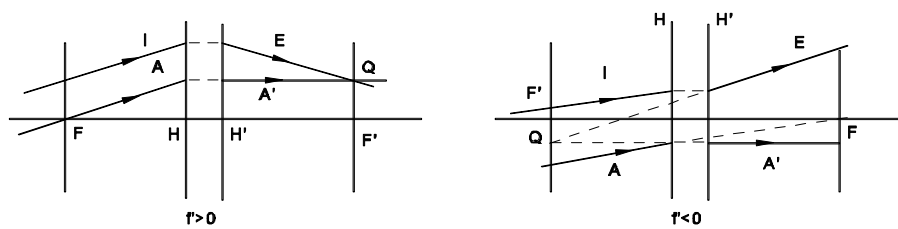


Fig. 1.13

Cuando los índices extremos son iguales, se puede trazar el rayo auxiliar  $B$  que entra en el sistema óptico paralelo a  $I$  por  $H$ . Este rayo sale por  $H'$  sin desviarse y corta al plano focal imagen en el mismo punto  $Q$ , por donde debe pasar el rayo emergente  $E$ :

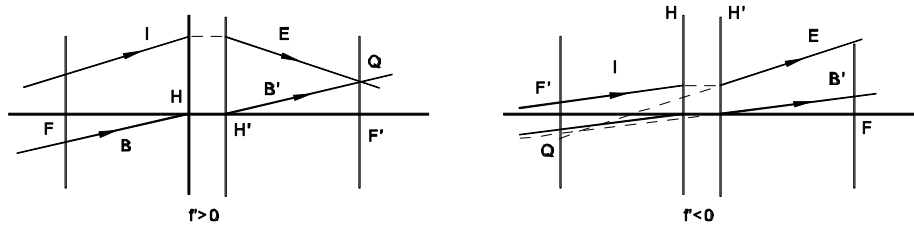


Fig. 1.14

Todos estos métodos, como es lógico, dan como resultado el mismo rayo emergente para un rayo incidente dado en un sistema óptico; el uso de uno u otro de ellos depende de la situación del conjunto y de las magnitudes que se deseen calcular sobre el rayo.

Mediante el trazado de rayos se resuelven muchos problemas de óptica geométrica e instrumental, sin más que aplicar a la figura las relaciones de semejanza de triángulos, tal como se hizo al obtener las ecuaciones de correspondencia.

### 1.13 Invariante óptico

Sea un sistema óptico perfecto, tal como el de la figura 1.15, representado por sus superficies ópticas extremas. Se coloca un objeto de tamaño  $y$  en el espacio objeto de índice  $n$ , y se obtiene una imagen de tamaño  $y'$  en el espacio imagen de índice  $n'$ . Se traza el rayo que parte del pie del objeto formando un ángulo  $u$  con el eje, y que llegará al pie de la imagen formando un ángulo  $u'$  con el eje óptico.

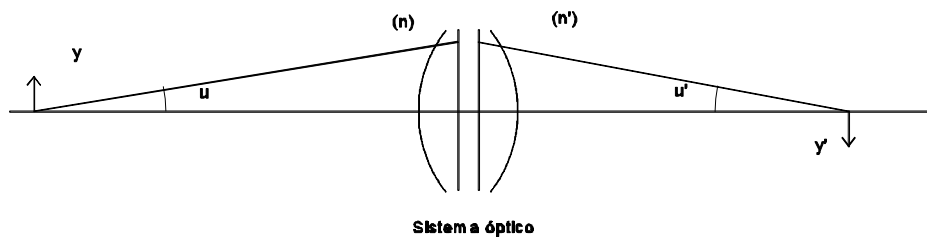


Fig. 1.15

Se cumple la relación denominada invariante óptico:

$$n y \operatorname{sen} u = n' y' \operatorname{sen} u'$$

En esta relación todas las variables del primer miembro afectan al objeto, mientras que las del segundo se refieren a la imagen. Por esta razón se denomina invariante, pues su valor se conserva al pasar del espacio objeto al espacio imagen. Se denomina también condición del seno de Abbe o invariante de Lagrange-Helmholtz.

Cuando los ángulos son muy pequeños, se puede aproximar el seno por el ángulo expresado en radianes y queda:

$$n y u = n' y' u'$$

Entonces se dice que el sistema trabaja en zona paraxial o zona de Gauss.

Cuando el objeto está en el infinito,  $y$  tiende a infinito, mientras que  $u$  tiende a cero, con lo que aparece una indeterminación en el primer miembro del invariante óptico. Para eliminar la indeterminación, se substituye (según la figura 1.16).

$$y = - a \tan$$

$$\operatorname{sen} u = \frac{h}{a}$$

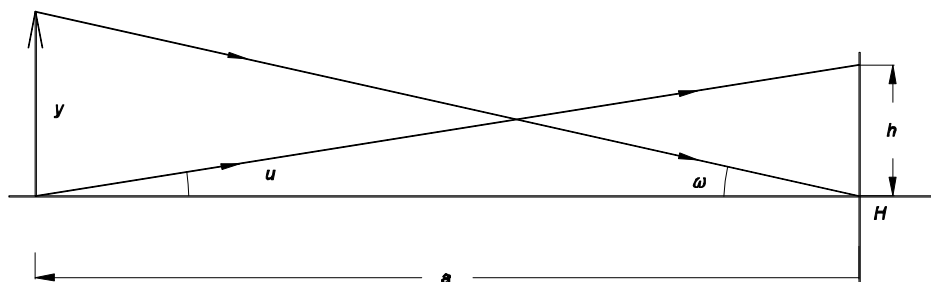


Fig. 1.16

La última relación es válida porque cuando  $u$  tiende a cero se confunde el seno con la tangente. Substituyendo en 1.17 queda:

$$- n h \tan \omega = n' y' \operatorname{sen} u'$$

donde  $h$  es la altura máxima de un rayo que entra en el sistema óptico paralelo al eje (proviene del punto del infinito en el eje) y  $F$  es el ángulo de semicampo (máximo ángulo que puede formar un rayo incidente con el eje). El doble del semicampo es el campo, concepto sobre el que se insistirá más adelante.

### 1.14 Cálculo de la imagen a través de diversos elementos

Cuando se trabaja con un sistema óptico compuesto de varios elementos, situados uno a continuación del otro, con el mismo eje óptico, y se desea calcular la imagen que se produce a partir de un objeto conocido, se procede de la siguiente manera:

1. Sea  $a_1$  la distancia del primer elemento al objeto y sea  $y_1$  la dimensión del objeto.  $f'_1, f'_2$ , etc. son las focales de los elementos sucesivos y  $d_1, d_2$ , etc. las distancias del elemento 1 al 2, del 2 al 3, etc.
2. Se calcula la posición y el tamaño de la imagen a través del primer elemento utilizando las relaciones vistas anteriormente:

$$\frac{n'_1}{a'_1} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n'_1}{f'_1} \quad (1.20a)$$

$$m = \frac{n_1 a'_1}{n'_1 a_1} = \frac{y'_1}{y_1} \quad (1.20b)$$

donde  $n_1$  y  $n'_1$  son los índices extremos del elemento 1. Mediante estas relaciones, se calcula la posición  $a'_1$  y el tamaño  $y'_1$  a través del primer elemento.

3. Esta imagen actúa como objeto para el elemento siguiente. Su tamaño y posición como objeto se hallan a partir de la fórmula siguiente:

$$a_2 = a'_1 - d_1 \quad ; \quad y_2 = y'_1$$

las relaciones anteriores se deducen fácilmente de la figura 1.17.

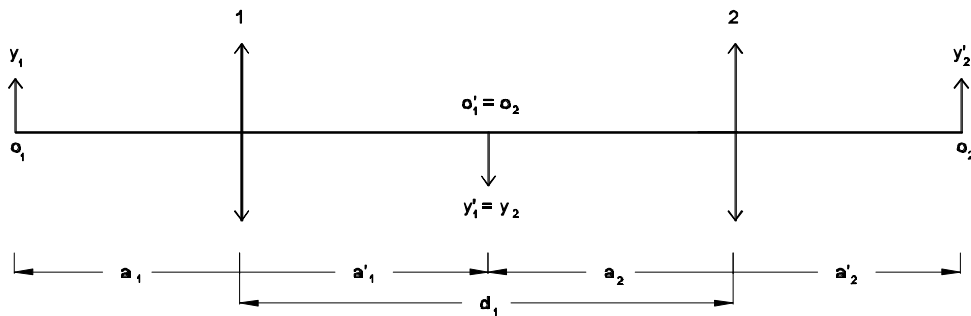


Fig. 1.17

4. Se repiten los puntos 2 y 3 aumentando cada vez los subíndices hasta que se llega a calcular la posición  $a'_k$  y el tamaño  $y'_k$  de la imagen final.

5. El aumento lateral del conjunto será:

$$m = \frac{y'_k}{y_1} = m_1 m_2 m_3 \dots \quad (1.22a)$$

y también:

$$m = \frac{n_1}{n'_k} \frac{a'_1 a'_2 a'_3 \dots a'_k}{a_1 a_2 a_3 \dots a_k} \quad (1.22b)$$

6. Si el objeto se encuentra en el infinito,  $a_1 = \infty$ , se puede calcular la focal del conjunto mediante la fórmula siguiente:

$$f' = \frac{a'_1 a'_2 a'_3 \dots a'_k}{a_2 a_3 \dots a_k} \quad (1.23)$$

En este caso se halla el tamaño de la primera imagen según el invariante óptico:

$$y'_1 = -\frac{n_1}{n'_1} f'_1 \tan u \quad (1.24)$$



### 1.15 Asociación de sistemas centrados

El estudio de un sistema formado por dos sistemas centrados consiste en la determinación de los elementos cardinales del sistema resultante.

La determinación gráfica de los puntos focales y principales se muestra en la figura 1.18.

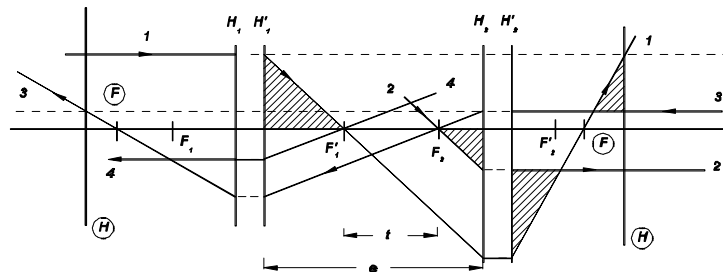


Fig. 1.18

Del análisis de los triángulos semejantes existentes en el sistema se deduce que:

- La distancia focal imagen y objeto del sistema compuesto es

$$f' = - \frac{f_1 f_2}{t} \quad (1.25)$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{t} \quad (1.26)$$

- La posición de los puntos principales es

$$\overline{H_1 H} = \frac{f_1 e}{t} \quad (1.27)$$

$$\overline{H_2' H'} = \frac{f_2' e}{t} \quad (1.28)$$

Hay otras fórmulas interesantes para encontrar la posición de los puntos focales del sistema compuesto. El punto focal imagen  $F'$  del sistema resultante es la imagen de  $F'_1$  por medio del segundo sistema; por tanto, por la fórmula de Newton (1.9) se tiene:

$$\overline{F_2 F'_1} \overline{F'_2 F'} = f_2 f'_2$$

$$\overline{F'_2 F'} = - \frac{f_2 f'_2}{t} \quad (1.29)$$

Como  $F$  es la antiimagen de  $F_2$  por medio del primer sistema, análogamente se tiene:

$$\overline{F_1 F} = \frac{f_1 f'_1}{t} \quad (1.30)$$

En óptica todo es asociación de sistemas centrados formados a partir de dioptrios esféricos y lentes delgadas.

## 1.16 Aberraciones

Lo ideal sería que, cuando aumentasen los campos y las aperturas de un sistema calculado con los métodos de la óptica paraxial, este sistema continuara comportándose como un sistema perfecto y no que las imágenes empezasen a presentar defectos.

Lo que debían ser planos imagen se convierten en superficies curvas; la semejanza entre objeto e imagen no se conserva; la nitidez de los detalles se pierde y aparecen imágenes borrosas, y la luz blanca del objeto aparece dispersa en sus colores por la imagen. Estos defectos se llaman aberraciones y se clasifican de la siguiente manera:

### 1.16.1 Aberraciones monocromáticas o geométricas

- 1 Aberración esférica (para un punto objeto del eje óptico)
- 2 Coma (aberración esférica para puntos fuera del eje óptico)
- 3 Astigmatismo (para puntos fuera del eje óptico)
- 4 Curvatura de campo
- 5 Distorsión

Las tres primeras se refieren a la calidad de la imagen de un punto y las dos últimas, a su posición.

### 1 Aberración esférica

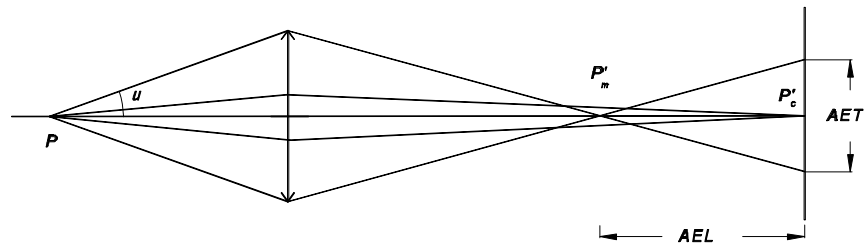


Fig. 1.19

Es una aberración de apertura. Se presenta cuando hay un comportamiento diferente de los rayos marginales respecto a los rayos centrales, procedentes todos de un punto del eje óptico, cuando pasan a través de un sistema óptico de apertura suficientemente grande. Tal como se manifiesta en la figura 1.19, los rayos marginales dan una imagen de  $P$  en el punto  $P'_m$  y los rayos centrales la dan en el punto  $P'_c$ .

La imagen que se obtiene para cualquier plano perpendicular al eje óptico entre  $P'_m$  y  $P'_c$  es un círculo. Existe una posición intermedia donde el círculo es mínimo, que es el denominado círculo de mínima confusión.

La distancia  $P'_m P'_c$  es la aberración esférica longitudinal para el punto  $P$  (es proporcional al cubo de la apertura).

El radio  $r$  del círculo que se obtiene en el plano frontal que pasa por  $P'_c$  es la aberración esférica transversal (o lateral) para el punto  $P$ .

### 2 Coma

Es una aberración de apertura. Se presenta cuando un punto  $P$ , fuera del eje óptico, envía un haz de gran apertura sobre el sistema óptico. Este varía proporcionalmente a la distancia de la imagen al eje y aumenta con el cuadrado de la apertura.

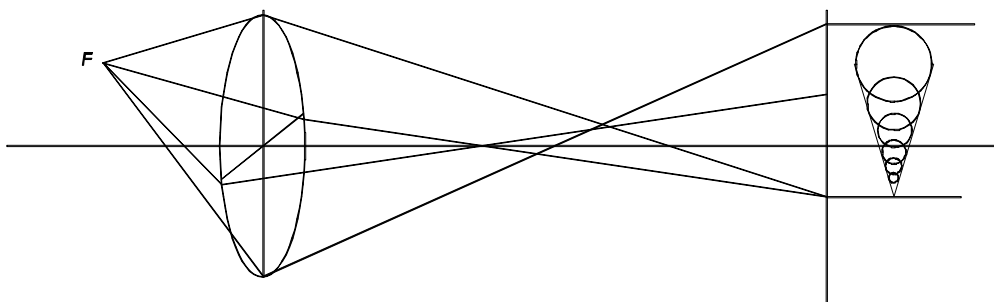


Fig. 1.20

La figura 1.20 muestra, en el caso de una lente delgada, que los rayos emergentes ya no son de revolución respecto a su eje óptico.

Una pantalla colocada perpendicularmente a un eje secundario del punto  $P$  hace que, como imagen del mismo aparezca una mancha disimétrica tanto en la forma como en la distribución de la luz dentro de la misma.

### 3 Astigmatismo

Es una aberración de campo. Se presenta en un sistema óptico muy diafragmado, por puntos fuera del eje. En el caso de un sistema óptico muy diafragmado, la imagen de un punto  $A$  sobre el eje es también un punto  $A'$  sobre el mismo eje (astigmatismo sobre el eje). Sin embargo, si la oblicuidad de un haz luminoso procedente de un punto  $B$  fuera del eje es demasiado grande, el haz emergente ya no es cónico con un solo punto de concurrencia, sino un haz que presenta dos zonas de concentración (o estrechamiento) que son dos pequeños segmentos perpendiculares entre sí, normales a la dirección media del haz. Estos segmentos son denominados focal sagital y focal tangencial, o también focales de Sturm.

La figura 1.21 muestra la estructura del haz refractado cuando es cortado en diferentes posiciones sucesivas por una pantalla perpendicular al rayo medio del haz. La imagen del punto  $B$  es una mancha, una sección elíptica que degenera en segmento de recta en las focales (imágenes primaria y secundaria, respectivamente, de  $B$ ). Para una cierta posición entre ellas se obtiene la mejor imagen de  $B$  (círculo de mínima confusión o pseudoimagen).

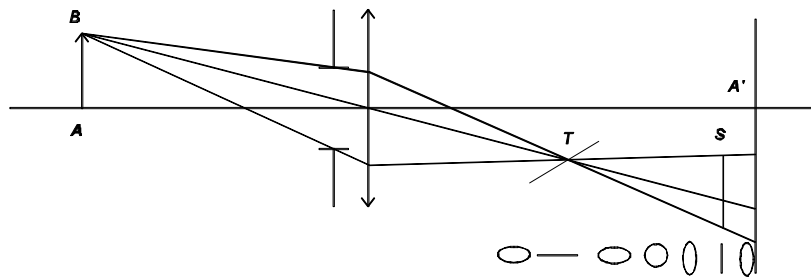


Fig. 1.21

Por otra parte, la imagen de un objeto perpendicular al eje óptico es el lugar geométrico de todos los puntos imagen primarios y secundarios de todos los puntos del objeto.

A medida que los puntos  $B$  se alejan del eje, la distancia entre las dos focales de Sturm crece y da lugar, en el espacio imagen del sistema, a dos superficies focales de revolución alrededor del eje óptico, con la concavidad hacia la luz incidente si el sistema es convergente y a la inversa si este es divergente (figura 1.22). En el eje, estas superficies focales son tangentes al punto  $A'$  (imagen paraxial de  $A$ ).

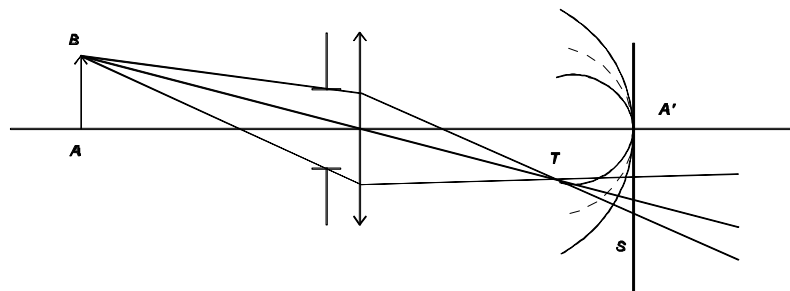


Fig. 1.22

La mejor imagen es el lugar geométrico de los círculos de mínima confusión, que es una superficie aproximadamente esférica, situada entre las dos superficies focales, y tangente con los círculos en el eje.

Si los rayos están poco inclinados sobre el eje óptico, el efecto de coma es más importante que el de astigmatismo. En cambio, si los rayos tienen una gran distancia angular del eje, el astigmatismo predomina.

Así pues, el objetivo de un telescopio de poco campo debe ser corregido sobre todo de coma (aplanático), mientras que el objetivo fotográfico, o de proyección, de gran campo debe ser corregido de astigmatismo

(anastigmatismo).

#### 4 Curvatura de campo

Aunque se realizara la concordancia entre las superficies focales, puede ocurrir aún que las imágenes de los puntos del plano objeto no estén todas en el plano imagen paraxial, sino en una superficie curva. En este caso se dice que el sistema tiene curvatura de campo.

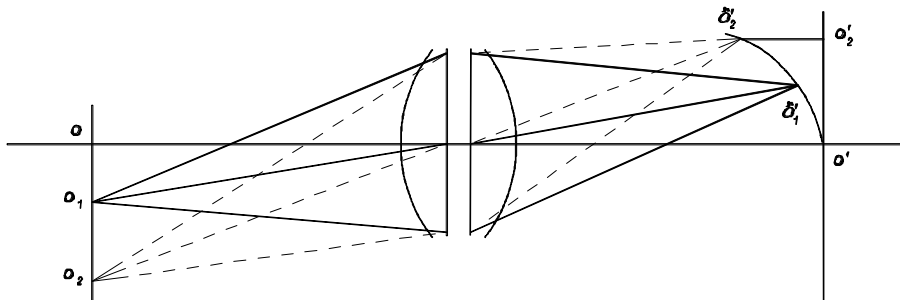


Fig. 1.23

#### 5 Distorsión

Suponiendo que de un objeto se obtenga una imagen astigmática y plana, así y todo, no tiene por qué ser semejante al objeto, con lo que se presenta la denominada distorsión que consiste en una falta de constancia del aumento lateral del sistema óptico cuando aumenta el tamaño del objeto.

Unas veces, al crecer el objeto, el aumento lateral disminuye, con lo cual la imagen es más pequeña de lo que debería ser, según las leyes de la óptica paraxial correspondientes a un sistema perfecto. En este caso, de una cuadrícula dará una imagen curva como la de la figura 1.24 (a), lo que se denomina distorsión en barril. Contrariamente, si el aumento lateral crece con el tamaño del objeto, la imagen es como la de la figura 1.24 (b) y se denomina distorsión en corsé.

Cuando un sistema está exento de distorsión se llama ortoscópico.

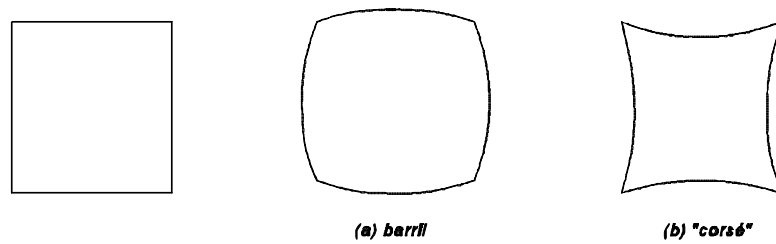


Fig. 1.24

### 1.16.2 Aberraciones cromáticas

Son generadas por la dispersión cromática que producen las lentes a la luz.

Salvo en los espejos, y a causa de la dispersión de la luz que presentan los vidrios y las sustancias transparentes en general, todo sistema óptico, incluso corregido de todas las aberraciones geométricas, da lugar a un comportamiento diferente para cada longitud de onda que compone la luz blanca o una luz policromática. Los elementos cardinales para cada color son distintos aun en el análisis paraxial.

En una lente delgada, por ejemplo, la fórmula

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left( \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right)$$

muestra que la distancia focal depende del índice de refracción  $n$  del material de la lente para la radiación utilizada. Así, para tres colores distintos  $F$ ,  $D$ ,  $C$ , la lente presenta tres índices distintos  $n_F$ ,  $n_D$ ,  $n_C$ , y los focos para estos colores aparecen separados tal como se indica en la figura 1.25.

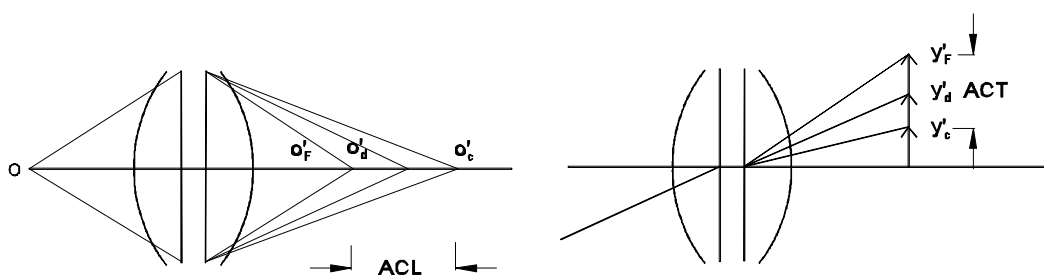


Fig. 1.25

Lo mismo sucedería con la posición de la imagen de un objeto  $A$  del eje. A esta variación de la posición de la imagen en el eje con el color se le llama cromatismo de posición.

La misma variación de la focal con el color hará en general que el aumento sea diferente para los distintos colores; en este caso, las imágenes de distinto color presentarán distinto tamaño. Este defecto se llama cromatismo de aumento.

### 1.16.3 Aberraciones de tercer orden

#### 1.16.3.1 Desarrollo del seno en serie de potencias

El seno de un ángulo puede desarrollarse como la suma de un número infinito de términos, cada uno más pequeño que el anterior, en la forma:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1.31)$$

siempre que el ángulo se exprese en radianes y donde  $n!$  ( $n$  factorial) vale:

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots$$

Cuando se toma el primer término del desarrollo, se hace la aproximación de primer orden, que da lugar a la óptica paraxial. Al añadir un término más al desarrollo, se obtiene la aproximación de tercer orden, en la que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} \quad (1.32)$$

En la tabla siguiente, se comparan los valores de las funciones trigonométricas y las aproximaciones de primer y tercer orden:

Tabla 1.1

$x^\circ$	$x$ (rad)	$x - x^3/6$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cos} x$
5°	0,08727	0,08715	0,08715	0,08748	0,99619
10°	0,17453	0,17365	0,17633	0,17633	0,98481
20°	0,34906	0,34198	0,34202	0,36397	0,93969
30°	0,52360	0,49967	0,50000	0,57735	0,86603
40°	0,69813	0,64142	0,64279	0,83910	0,76604



La aproximación de tercer orden es válida dentro del rango aceptable de ángulos de hasta  $30^\circ$ .

Así, sucesivamente, se hacen las aproximaciones de quinto orden y de órdenes superiores, sin más que añadir nuevos términos al desarrollo.

## 2 Aberraciones de tercer orden

Aplicando la aproximación de tercer orden sistemáticamente, se pueden calcular las aberraciones (conceptualmente ya conocidas de la óptica geométrica) en función de los parámetros constructivos de los sistemas ópticos (radios, espesores e índices), en la misma forma que en la óptica paraxial se calculan las posiciones y los tamaños de las imágenes.

Los valores así obtenidos se denominan aberraciones de tercer orden y, para aperturas o campos no muy grandes, se aproximan bastante a los valores exactos de las aberraciones.

El cálculo de las aberraciones de tercer orden es mucho más sencillo que el de las aberraciones reales y presenta ciertas ventajas al corregir un sistema óptico.

Las aberraciones varían con la apertura y con el campo del sistema óptico para el que se calculan. Su dependencia del tamaño de la imagen  $y'$  y de la apertura  $A$  se da en la siguiente tabla.

Tabla 1.2

<i>aberración</i>	<i>altura de la imagen</i>	<i>apertura</i>
esférica	-	$A^3$
coma	$y'$	$A^2$
astigmatismo	$y'^2$	-
curvatura	$y'^2$	$A$
distorsión(%)	$y'^3$	-
cromática de posición	-	-
cromática de aumento	$y'$	-

De la misma forma se pueden calcular las aberraciones de quinto orden o de órdenes superiores, haciendo las aproximaciones correspondientes, y que serán válidas para campos y aperturas mayores.

### 1.17 Tolerancias en los sistemas ópticos

Si los sistemas ópticos nunca van a producir imágenes puntuales, a causa del fenómeno de la difracción, se deduce que no es necesario corregir las aberraciones por debajo del límite impuesto por la difracción,

pues no se conseguirá por ello una mejor calidad de la imagen.

Se pueden establecer, por tanto, unos valores mínimos de las aberraciones, llamados tolerancias, por debajo de los cuales no vale la pena reducir el valor de las correspondientes aberraciones.

Además de este criterio, basado en la difracción, hay otros métodos para determinar las tolerancias, que revelan unos resultados semejantes y permiten corregir los valores obtenidos. Por ejemplo, la experiencia en la construcción de diferentes sistemas ópticos puede ayudar en gran medida a determinar las tolerancias más prácticas.

Supongamos un sistema óptico que trabaja con una longitud de onda  $\lambda$ , siendo  $n'_k$  el índice del espacio imagen y  $F'_k$  el ángulo del rayo marginal con el eje óptico a la salida del sistema. Las tolerancias que se tienen en consideración son las siguientes:

Tolerancia de desenfoque:

$$T_f = \frac{\lambda}{n'_k \operatorname{sen}^2 \sigma'_k} \quad (1.33)$$

Tolerancia esférica:

$$T_{AEL} = 4 T_f$$

Tolerancia cromática longitudinal:

$$T_{ACL} = T_f$$

Tolerancia de coma sagital:

$$T_{CS} = \frac{\lambda}{2 n'_k \operatorname{sen} \sigma'_k} \quad (1.36)$$

Si el sistema está corregido de esférica para el rayo marginal, la esférica zonal tolerable es

$$T_{AELZ} = 6 T_F$$

Para la curvatura de imagen y el astigmatismo se obtienen unas tolerancias excesivamente pequeñas, por lo que en la práctica suelen usarse valores algo superiores.

La tolerancia de la distorsión varía mucho dependiendo del uso que vaya a darse al sistema.

Debe insistirse en el hecho de que las tolerancias disminuyen cuando aumenta la apertura del sistema óptico, pues entonces la difracción se hace menos patente. Además, en los sistemas de gran apertura es más difícil corregir las aberraciones y no se puede aplicar con éxito la aproximación de tercer orden. De todos estos factores se deduce que un pequeño incremento en la apertura de un sistema óptico puede suponer un gran esfuerzo de corrección de aberraciones, que puede desembocar en la necesidad de usar muchas lentes, con lo que no se gana apreciablemente en la calidad del instrumento.

### 1.18 Proceso de cálculo de un sistema óptico

Debajo de la denominación de cálculo de sistemas ópticos o cálculo de combinaciones ópticas se agrupan las tareas que se deben hacer para obtener los proyectos de fabricación de sistemas ópticos que producen imágenes corregidas de las aberraciones para que lleguen a dar los datos necesarios para su construcción, como los radios de curvatura, espesores, vidrios, diámetros, posiciones de diafragma, imágenes intermedias, etc.

En el cálculo de sistemas ópticos se pueden distinguir diferentes fases hasta llegar al sistema definitivo. En primer lugar, se hace un anteproyecto con lentes delgadas teniendo en cuenta aperturas, campos y focales. Se divide el sistema óptico completo en diferentes sistemas ópticos situados entre dos imágenes intermedias reales para trabajar con cada una de estas por separado. A continuación, se tienen que sustituir las lentes delgadas por una o más lentes gruesas. Se necesitarán más o menos lentes gruesas según los requisitos exigidos en cuanto a la apertura y al campo. También se debe tener en cuenta las posiciones del objeto y de la imagen, los diámetros exigidos, etc. Se escogerán los vidrios según los índices de catálogo.

Entonces, se pueden aplicar las condiciones de acromatismo y también las aproximaciones de tercer orden, que se han visto en su forma más elemental.

Una vez se ha obtenido el sistema con las lentes gruesas, se tienen que calcular las aberraciones reales y observar si se encuentran en el margen de tolerancias para el sistema del que se trate. Cuando no suceda así, será necesario variar los parámetros del sistema hasta que se corrijan las aberraciones.

Se tiene que prestar especial atención a los ángulos de incidencia de los rayos en las superficies ópticas, ya que cuando son superiores a  $40^\circ$  obligan a sustituir esta lente por otras dos que reparten la convergencia de los rayos entre sí.

Ocasionalmente, es necesario volver al paso anterior y corregir las suposiciones que se hicieron en la aproximación de tercer orden.

Cuando se consigue que las aberraciones reales no sean exageradas, hay que minimizar su influencia en la imagen final. Para ello, se puede permitir que alguna aberración importante disminuya a costa de que aumente el valor de una aberración secundaria.

Se suelen dar pequeñas variaciones en los radios y en los espesores hallando en cada caso las aberraciones, y planteando un sistema de ecuaciones que, resuelto, da un conjunto de variaciones de los parámetros que reduce las aberraciones. Cuando se dispone de ordenadores potentes, se puede automatizar el proceso de minimización, aunque a veces no es posible aplicarlo con eficiencia suficiente.

En muchas ocasiones no se pueden reducir las aberraciones todo lo que se desea, y se deben compensar con las de otros sistemas intermedios o llegar a una situación de compromiso entre unas aberraciones y las otras.

Se puede hacer una revisión completa del sistema con un diagrama de puntos que consiste en calcular los puntos de corte con el plano imagen de cada uno de los rayos que, procedentes de un punto objeto, llenan la pupila de entrada. Así, se obtiene una mancha o *spot*, cuyo tamaño da la resolución del sistema en líneas por milímetro. Con ordenadores potentes se pueden trazar centenares de rayos para diferentes campos, que dan el comportamiento exacto del sistema óptico.

Una vez conseguido el sistema óptico final, se debe hacer un recálculo con los índices de los vidrios de catálogo y con los radios normalizados de los calibres existentes.

En caso necesario se construyen varios prototipos con diferentes estados de corrección y se determina en el laboratorio cuál de ellos es el más conveniente.

Este laborioso proceso de corrección no tiene unas reglas fijas, y además son escasas las publicaciones sobre el tema debido al secreto de fabricación.

### **1.19 Función de transferencia óptica de modulación (MTF)**

Un tipo de objeto muy utilizado para calibrar la calidad de un sistema óptico consiste en una serie de barras alternativamente claras y oscuras, tal como se representa en la figura (1.26 A), que se denominan barras de Foucault.

Suelen agruparse varios conjuntos de barras de diferentes espaciados que serán resueltos por el sistema óptico con más o menos detalle según su calidad.

Si se representa en abscisas una distancia lineal sobre el objeto y en ordenadas la intensidad de luz emitida, se obtiene una función escalón (figura 1.26 B).

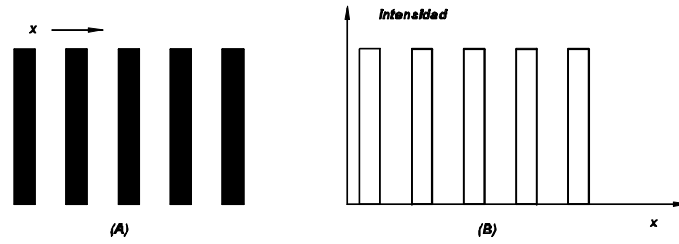


Fig. 1.26

Para expresar la calidad de la imagen obtenida, se define el contraste o modulación  $M$  dado por

$$M = \frac{I_{m\grave{a}x} - I_{m\grave{i}n}}{I_{m\grave{a}x} + I_{m\grave{i}n}} \quad (1.38)$$

donde  $I_{m\grave{a}x}$  y  $I_{m\grave{i}n}$  se definen como las intensidades luminosas máximas y mínimas medidas sobre la imagen.

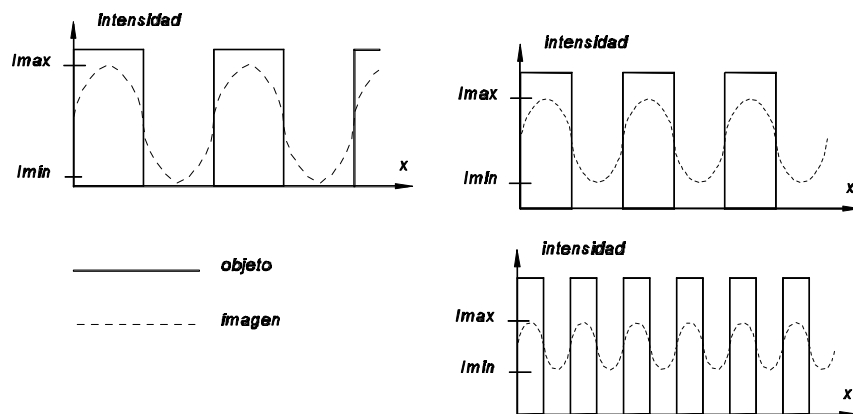


Fig. 1.27

Por ejemplo, según la figura (1.26 a), la modulación del objeto sería la unidad; la de la imagen varía con la distancia existente entre las barras, tal como se demuestra en la figura 1.27, de tal manera que, cuanto

mayor sea la frecuencia espacial (número de líneas por milímetro), menos contraste hay en la imagen.

Cuando el objeto tiene una curva de intensidad de forma sinusoidal, la imagen también tiene dicha forma, aunque con diferente contraste o modulación (fig. 1.28).

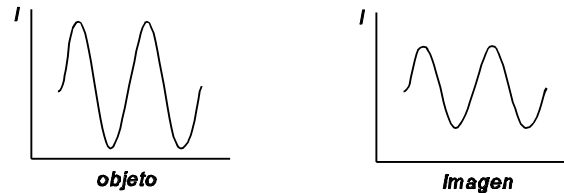


Fig. 1.28

Lo que interesa es como se transfiere el contraste del objeto a la imagen, es por ello que se define la función de transferencia óptica de modulación *MTF* (Modulation Transfer Function) de la manera que indica la ecuación 1.39.

$$MTF = \frac{\text{modulación imagen}}{\text{modulación objeto}} \quad (1.39)$$

Dicha función se puede representar frente a la frecuencia espacial del objeto, lo que da una curva que indica la calidad de un sistema óptico de una forma exacta y completa (Fig. 1.28).

La *MTF* se aplica tanto a objetos de alto contraste (blanco / negro) tales como las miras de Foucault o las de la carta test de la figura 1.29, como a objetos de bajo contraste (grises) que son los más habituales en la realidad.

Para un sistema óptico perfecto, la *MTF* adopta la forma de la figura 1.28 (a), donde la frecuencia límite  $f_0$  está dada por la difracción del sistema óptico y depende fundamentalmente del diámetro de la pupila de entrada.

La *MTF* para frecuencia cero (campo objeto uniforme) será siempre la unidad y su valor disminuirá conforme aumente la frecuencia espacial.

Cuando el sistema óptico no es perfecto, la *MTF* queda por debajo de la curva del sistema perfecto, aunque puede presentar máximos y mínimos locales, tal como indican las figuras 1.28 (b) y (c). La función de transferencia presenta ciertas ventajas para definir un sistema óptico.

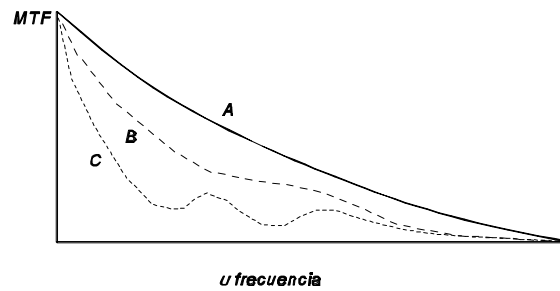


Fig. 1.29

Se puede medir en el laboratorio con el instrumental adecuado, lo que permite una revisión completa de sistemas ópticos ya fabricados como control de calidad.

Cuando se acoplan dos sistemas ópticos, la *MTF* del conjunto se puede hallar haciendo el producto punto a punto de las *MTF* parciales de cada uno de los sistemas acoplados. Así se puede apreciar el resultado de acoplar un sistema óptico a otro elemento que no sea puramente óptico, como una cámara de televisión, un tubo intensificador de imagen, una película fotográfica, el ojo e incluso la atmósfera a través de la cual pasa la luz en su camino hacia el sistema, etc., sin más que conocer las correspondientes *MTF*.